АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЭКОНОМИКИ, УПРАВЛЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИИ

Нечеткие подалгебры

В.В. МУХИН – профессор кафедры прикладной математики Череповецкого государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

В.А. ДУДЕК – профессор, доктор физико-математических наук института математики технологического университета (г. Вроцлав, Польша);

Т.В. РАТНИКОВА – следователь следственного управления при УВД (г. Череповец)

Введение

Нечеткие логики являются естественным аппаратом принятия решений в таких трудно формализуемых областях человеческой деятельности, как юриспруденция, психология, правоохранительная деятельность. Нечеткая логика основывается на понятии нечеткого множества, которое определяют как пару, состоящую из четкого множества и функции принадлежности, принимающей значения из отрезка [0; 1]. В перечисленных же выше областях более естественно рассматривать функцию принадлежности, принимающей значения из некоторого частично упорядоченного множества, связанного с рассматриваемой задачей.

В данной работе такой подход реализован при рассмотрении подалгебр некоторых алгебр. В ней развиваются понятия нечеткого множества и нечеткой подалгебры, рассматриваются нечеткие подалгебры n-арных группоидов.

1. Нечеткие подалгебры алгебр

Определение 1. Пусть $(\Omega, \le)$ – упорядоченное множество, обладающее наибольшим элементом ω^1 и наименьшим элементом ω^0. Нечетким подмножеством множества *X* назовем тройку (X, Ω, L), где $L: \Omega \to 2^X$ такое, что:

1) $L(\omega^0) = X$;

2) $\omega_1 \ge \omega_2$ влечет $L(\omega_1) \in L(\omega_2)$.

Допуская вольность, говорим, что *L* – нечеткое подмножество *X*, или нечеткое множество на *X*, или нечеткое множество с носителем *X*. Множество $L(\omega)$ назовем уровнем *L*.

Не всякое нечеткое множество в смысле нашего определения представимо в стандартном виде даже для случая $\Omega = [0;1]$.

Пусть $X = \mathbf{R}$ и пусть
$$L(t) = \begin{cases} X, & \textbf{\textit{при}}\ t = 0, \\ (1;\ 2) & \textbf{\textit{при}}\ 0 < t < 1, \\ \varnothing, & \textbf{\textit{при}}\ t = 1. \end{cases}$$

Тогда ($\mathbf{R}$, [0; 1], L) является нечетким подмножеством $\mathbf{R}$. Для него не существует функции $\mu : \mathbf{R} \to [0;1]$ такой, что $t) = \{x \in X \mid \mu(x) \ge t\}$ Действительно, в предположении противного для каждого $x \subset [0; 1]$ имеем $\alpha \le \mu(x) < 1$ для любого $0 \le \alpha < 1$, что невозможно.

Следовательно, наше определение нечеткого множества шире стандартного определения.

Теорема 1. *Пусть (X, Ω, L) – нечеткое множество, где Ω – линейно упорядоченное множество. Для того чтобы существовала функция μ на X со значениями в Ω такая, что $L(\omega) = \{x \in X \mid \mu(x) \ge \omega\}$ для любого $\omega \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы семейство множеств $L(\omega) \setminus \bigcup_{s > \omega} L(s)$ для любого $(\omega \in \Omega)$ было разбиением множества X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть требуемая функция μ существует и пусть $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\omega_1 \ne \omega_2$. Пусть для определенности $\omega_1 > \omega_2$. Тогда $L(\omega_1) \subset L(\omega_2)$. Множество $L(\omega_2) \setminus \bigcup_{s > \omega_2} L(s)$ не содержит $L(\omega_1)$. Следовательно, множества $L(\omega_2) \setminus \bigcup_{s > \omega_2} L(s)$ и $L(\omega_1) \setminus \bigcup_{s > \omega_1} L(s)$ не пересекаются.

Пусть $\omega_1 = \mu(x_1)$ для $x_1 \in X$. Тогда множество $L(\omega_1) \setminus \bigcup_{s > \omega_1} L(s)$ содержит x_1 и, следовательно, семейство $L(\omega) \setminus \bigcup_{s > \omega} L(s)$ $(\omega \in \Omega)$ является разбиением множества X.

Достаточность. Пусть семейство $L(\omega) \setminus \bigcup_{s > \omega} L(s)$ $(\omega \in \Omega)$ является разбиением множества *X*. Тогда для каждого $x \in X$ существует единственный элемент ω из Ω такой, что $x \in L(\omega) \setminus \bigcup_{s > \omega} L(s)$. Положим μ(x) равным этому элементу ω. Функция μ(x) будет удовлетворять требованиям теоремы.

В самом деле, пусть $\mu(x) \geq \omega_1$. Тогда по построению $x \in L(\mu(x)) \in L(\omega_1)$. Если же $x \in L(\omega_1)$, то для некоторого ω из Ω имеем $x \in L(\omega) \setminus \bigcup_{s>\omega} L(s)$.

В силу линейной упорядоченности Ω заключаем, что $\omega \geq \omega_1$, и поэтому $\mu(x) = \omega$.

Теорема доказана.

Определение 2. Нечеткое множество L такое, что $L(\omega) = L(\omega^1)$ для всех $\omega \in \Omega$ такого, что $\omega^0 < \omega$, назовем четким множеством; его будем отождествлять с множеством $L(\omega^1)$.

Нами были определены операции над нечеткими множествами[1]. В частности, если *(X, Ω, L)* – нечеткое множество и φ: $X \to Z$, то нечеткое подмножество *(Z, Ω, φ L)* множества Z, где (φ L) (ω) = φ(L(ω)) для $\omega > \omega^0$ и (φ L) (ω^0) = Z, называется образом L при отображении φ.

Определение 3. Пусть (X, Σ) – алгебра. Нечеткое множество L на X назовем нечеткой подалгеброй алгебры *(X, Σ)*, если для любой операции $f \in \Sigma$ имеем $f(\underbrace{L \times \ldots \times L}_{n}) \subset L$,

где $n > 0$ – местность операции f.

В случае нульместной операции f требуем $f \in L(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$.

Теорема 2. *Нечеткое множество L алгебры (X, {f}) является нечеткой подалгеброй алгебры (X, {f}) тогда и только тогда, когда каждый уровень L(ω) является подалгеброй алгебры (X, {f}) или пуст.*

Доказательство этой теоремы приведено в статье, на которую мы раннее ссылались[2].

Пусть (X, ·) – алгебра с одной ассоциативной операцией, являющейся группой. Операцию $x \to x^{-1}$ взятия обратного элемента обозначим -1, а нульместную операцию выбора нейтрального элемента e – через e.

Теорема 3. *Пусть алгебра (X,·, -1, e) является группой и пусть L – нечеткое множество на X. Тогда следующие условия равносильны:*

а) L – нечеткая подалгебра алгебры (X,·, -1, e);

б) L – нечеткая подалгебра алгебры (X,·, -1, e), и уровень L (ω) не пуст для каждого ω ∈ Ω;

в) L(ω) является подгруппой группы X для каждого ω ∈ Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) => б) – это очевидно.

Докажем б) => в). Из б) следует, что для любого $\omega \in \Omega$. $L(\omega)$ – непустое подмножество X, $L(\omega)$. $L(\omega) \subset L(\omega)$ и $(L(\omega))^{-1} \subset L(\omega)$, то есть $L(\omega)$ является подгруппой группы X. Следовательно, верно в).

Докажем в) => а). Если выполнено в), то $e \in L(\omega)$ для любого ω, $L(\omega) \cdot L(\omega) \subset L(\omega)$ и $(L(\omega))^{-1} \subset L(\omega)$. Отсюда следует, что L – нечеткая подалгебра алгебры *(X,·, -1, e)*. Следовательно, в) => а). Значит, условия а), б), в) равносильны.

Теорема 4. *Пусть (X, Σ) – алгебра, Ω = [0; 1],* $\mu: X \to [0;1]$ *и* $L(\omega) = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \omega\}$. *L является нечеткой подалгеброй алгебры (X, Σ) тогда и только тогда, когда* $\mu(f(x_1,\ldots,x_n)) \geq \min\{\mu(x_1) \ldots, \mu(x_n)\}$

для любой последовательности $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$ *и любой операции* $f \in \Sigma$, *где n – местность операции f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть L – нечеткая подалгебра алгебры *(X, Σ)*. Тогда, как было отмечено выше, $L(\omega)$ является подалгеброй алгебры *(X, Σ)* или пустым множеством для любого $\omega \in [0; 1]$. Пусть $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$ и

$\omega = \min\{\mu(x_1) \ldots, \mu(x_n)\}$. Тогда $x_1,\ldots,x_n \in L(\omega)$,

поэтому $f(x_1,\ldots,x_n) \in L(\omega)$ для любой операции $f \in \Sigma$ и, следовательно, $\mu(f(x_1,\ldots,x_n) \geq \omega$.

Достаточность. Пусть $\omega \in [0; 1]$ и $x_1,\ldots,x_n \in L(\omega)$ Имеем $\mu(x_i) \geq \omega$ для i = 1, 2, ..., n. Отсюда для любой операции $f \in \Sigma$

$\mu(f(x_1,\ldots,x_n) \geq \min\{\mu(x_1) \ldots, \mu(x_n)\} \geq \omega$.

Следовательно, $f(x_1,\ldots,x_n) \in L(\omega)$, то есть L – нечеткая подалгебра алгебры *(X, {f})*.

2. Нечеткие подгруппоиды n-арных группоидов

Во многих разделах математики и ее приложениях рассматриваются множества с одной операцией $f: G^n \to G$, где n – фиксированное целое число ≥ 2. Такие множества называют n-арными группоидами. Мы будем обозначать их символом (G, f).

В соответствии с общей договоренностью в теории n-арных систем последовательность элементов $a_1,\ldots,a_n,b_k,\ldots,b_m$ обозначаем через $a_1^n b_k^m$ или $\underset{n}{a} b_k^m$, если $a_1 = \ldots = a_n = a$, а результат $f(a_1,\ldots,a_n)$ n-арной операции f на такой последовательности – через $f(a_1^n)$. Операцию f называют ассоциативной, если для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $x_1^{2n-1} \in G^{2n-1}$ выполняется равенство

$f(x_1^{i-1}, f(x_i^{n+i-1})\ x_{n+i}^{2n-1}) = f(x_1^{j-1}, f(x_j^{n+j-1})\ x_{n+j}^{2n-1})$.

n-арный группоид с ассоциативной операцией называют n-арной полугруппой.

n-арной квазигруппой называют такой n-арный группоид (G, f), что для любого $1 \leq i \leq n$ и любой последовательности $x_1^n \in G^n$ существует единственный элемент $z \in G$ такой, что $f(x_1^{i-1}, z, x_{i+1}^n) = x_i$. Тем самым для n-арной квазигруппы определено семейство n-арных операций $g_i(x_1^n) = z_i$ $(1 \leq i \leq n)$ на множестве G.

n-арную квазигруппу (G, f) с ассоциативной операцией f называют n-арной группой.

Непустое подмножество S n-арного группоида (G, f), замкнутое относительно операции f, называется подгруппоидом (G, f). Подгруппоид S называется k-идеалом (G, f), если $f(x_1^{k-1}, a, x_{k+1}^n) \in S$ для всякой последовательности $x_1^n \in G^n$ и для любого $a \in S$. Если S является k-идеалом для каждого k = 1, 2, ..., n, то S называют идеалом (G, f).

Определение 4. Пусть (G, f) – n-арный группоид. Нечеткое множество L на G называем нечетким подгруппоидом n-арного группоида (G, f), если L является нечеткой подалгеброй алгебры $(G, \{f\})$, что равносильно тому, что каждый уровень $L(\omega)$ является погруппоидом (G, f) или пустым множеством.

Теорема 5. *Пусть Ω – упорядоченное множество, удовлетворяющее требованиям определения 1, Λ – непустое подмножество Ω, и S_λ – семейство подгруппоидов (G, f) такое, что*

(i) $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$;

(ii) если $\alpha > \beta$ $S_\alpha \subset S_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Тогда семейство $L(\omega) = \bigcap \bigcup_{\lambda \in \Lambda,\ \lambda \geq \omega} S(\lambda)$ $(\omega \in \Omega)$ является нечетким подгруппоидом (G, f).

Доказательство теоремы следует из определения 1 и того факта, что пересечение любого семейства *n*-арных подгруппоидов (G, f) являтся *n*-арным подгруппоидом (G, f) или пустым множеством.

Определение 5. Пусть *L* – нечеткое множество на *n*-арном группоиде (G, f), k – целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq k \leq n$ и $x_1^{n-1} \in G^{n-1}$. Полагаем,

$$f(x_1^{k-1}, L, x_k^{n-1})(\xi) = f(\{x_1\} \times \ldots \times \{x_{k-1}\} \times L(\omega) \times \{x_k\} \times \ldots \times \{x_{n-1}\})$$

для каждого $\omega \in \Omega$. Так, определенное семейство подмножеств множества *G* будет нечетким подмножеством множества *G*; его будем называть *k*-сдвигом нечеткого множества L на последовательность x_1^{n-1}.

Определение 6. Нечеткое множество *L* на *n*-арном группоиде (G, f) называется нечетким *k*-идеалом, если $f(x_1^{i-1}, L, x_i^{n-1})(\omega) \subset L(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$ и для любой последовательности $x_1^n \in G^n$. Если *L* – нечеткий k-идеал для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$, тогда *L* называется нечетким идеалом (G, f).

Теорема 6. *Пусть (X, Σ) – алгебра, Ω = [0; 1], $\mu: X \to [0; 1]$ и $L(\omega) = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \omega\}$ $(\omega \in \Omega)$. Семейство L является нечетким k-идеалом (G, f) тогда и только тогда, когда $\mu(f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)) \geq \mu(x_k)$ для любой последовательности $x_1^n \in G^n$, удовлетворяющей условию $x_k \in L(\omega)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть L – нечеткий k-идеал (G, f) и пусть последовательность $x_1^n \in G^n$ такая, что $x_k \in L(\omega)$. Для $\omega = \mu(x_k)$ имеем $x_k \in L(\omega)$. Отсюда $f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \in L(\omega)$ и, следовательно, $\mu(f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)) \geq \omega = \mu(x_k)$.

Достаточность. Пусть $\omega \in [0; 1]$ и $x_1^n \in G^n$ при условии, что $x_k \in L(\omega)$ По условию $\mu(f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)) \geq \mu(x_k) \geq \omega$. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \in L(\omega)$. Значит, L – нечеткий k-идеал (G, f).

Определение 7. Нечеткое множество L на n-арной квазигруппе (G, f) называется нечеткой подквазигруппой (G, f), если L является нечеткой подалгеброй алгебры $(G; f, g_1, \ldots g_n)$. Если же (G, f) – n-арная группа, то нечеткая подквазигруппа (G, f) называется нечеткой подгруппой (G, f).

Теорема 7. *Пусть L – нечеткое множество на n-арной группе (G, f). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) L – нечеткая подгруппа (G, f);

(ii) – каждый уровень нечеткого множества L является подгруппой n-арной группы (G, f) или пустым множеством.

Доказательство. Пусть L – нечеткая подгруппа (G, f). Тогда для каждого $(\omega \in \Omega)$ уровень $L(\omega)$ является подалгеброй алгебры $(G; f, g_1, \ldots g_n)$, если он не пуст, и, следовательно, является подгруппой n-арной группы (G, f).

Пусть выполнено условие (ii) . Тогда для каждого $(\omega \in \Omega)$, каждой последовательности $x_1^n \in L(\omega)^n$ и каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем $g_k(x_1, \ldots, x_n) \in L(\omega)$. Следовательно, L является нечеткой подалгеброй алгебры $(G; f, g_1, \ldots g_n)$, то есть нечеткой подгруппой (G, f).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] См.: Мухин В.В., Утцаль И.Э. Об одном обобщении нечетких множеств // Вестник ЧГУ. Естественные и технические науки. 2006. № 2 (11). С. 16–19.

[2] См.: Там же.

Инновационная деятельность в Вологодской области: текущее состояние[1]

С.В. ТЕРЕБОВА – научный сотрудник ВНКЦ ЦЭМИ РАН, кандидат экономических наук

Главная движущая сила развития производства и общества в эпоху интенсивной научно-технической революции – инновации. Они составляют основу конкурентоспособности фирм, отраслей, регионов и стран, являются необходимым элементом любого воспроизводственного процесса.

Уже сегодня в развитых странах внутренний валовой продукт на 75–90% достигается за счет «прогресса в знаниях» – интеллектуализации основных факторов производства. В России этот показатель не превышает 10%. Становится очевидным, что дальнейшее обеспечение эко-